L.7.11 Sahline

A.S :2006/2007

Devoir de contrôle N°3

Classes 4ème sc&T

Durée : 2.h

Exercice N°1: (5pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_1^e (\text{Log}x)^n\,dx$

1/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [1,e]$: $(\text{Log}x)^n - (\text{Log}x)^{n+1} \geq 0$

b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2/a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

c) En déduire la valeur de I_2

3/a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq 0$. Déduire que la suite (I_n) est convergente.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)I_n \leq e$. Déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

Exercice N°2: (5pts)

On dispose d'un dé cubique et homogène dont les faces sont numérotées :

-1 ; - 1 ; - 1 ; 0 ; 1 ; 1

On jette ce dé deux fois de suite et on note à chaque fois le numéro de la face supérieure

1/a) Déterminer la probabilité de chacun des évènements A et B suivants :

A : « Les deux numéros obtenus sont différents ».

B : « la somme des deux numéros obtenus est égale à 0 ».

C : « Les deux numéros obtenus sont différents sachant que leur somme est égale à 0 ».

b) Les évènements A et B sont ils indépendants ? Justifier votre résultat.

3/ Soit l'évènement S_m définie par « Les deux numéros obtenus leur somme est égale à m ».

Calculer la probabilité de l'évènement S_m suivant les valeurs de m possible

Problème (10pts) :

1/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α et que: $1,1 < \alpha < 1,2$

c) En déduire le signe de g(x)

2/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

a) Montrer que : $\forall x \geq 0$ $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$

d) Ecrire une équation de la demi tangente (T) à ζ_f au point d'abscisse 0.

3/ Tracer (T) et ζ_f courbe représentative de f dans un R .O.N $(o,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 4\text{cm}$

4 /a) Montrer que : $\forall x \geq 0 : f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$ puis déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}_+$

b) Calculer en cm^2 l'aire de la région du plan limitée par ζ_f et les droites d'équations respectives $y = 0 ; x = 0$ et $x = 1$